

ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ

Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

ΤΕΤΑΡΤΗ 15 ΑΠΡΙΛΙΟΥ 2026

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΘΕΜΑ Α

A1. Έστω μια συνάρτηση f , ορισμένη σε ένα διάστημα Δ . Αν

- η f είναι συνεχής στο Δ και
 - $f'(x) > 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ ,
- να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ .

Μονάδες 7

A2. Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα $[\alpha, \beta]$;

Μονάδες 4

A3. Να διατυπώσετε το Θ.Μ.Τ. του διαφορικού λογισμού και να δώσετε την γεωμετρική ερμηνεία του.

Μονάδες 4

A4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιο σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή τη λέξη **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λάθος.

α) Για κάθε αντιστρέψιμη συνάρτηση $f: A \rightarrow B$ ισχύει:

$$f(x)=y \iff f^{-1}(y)=x \text{ για κάθε } x \in A \text{ και } y \in f(A).$$

β) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - 1}{x} = 1$

γ) Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ ή $-\infty$, τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = 0$.

δ) Η συνάρτηση $f(x) = x^a$, $a \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.

ε) Το μικρότερο από τα τοπικά ελάχιστα μιας συνάρτησης είναι το ολικό ελάχιστο της.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι συναρτήσεις $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = x - e^x$ και $g: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $g(x) = \ln x$.

B1. Να βρείτε την συνάρτηση $f \circ g$.

Μονάδες 5

B2. Αν $\varphi(x) = (f \circ g)(x) = \ln x - x$, $x > 0$.

Να μελετήσετε την φ ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.

Μονάδες 7

B3. Να δείξετε ότι η φ είναι κοίλη, να βρείτε την κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f και να την σχεδιάσετε.

Μονάδες 7

B4. i) Να βρείτε το σύνολο τιμών της φ .

ii) Να δείξετε ότι η εξίσωση $\frac{\ln x}{x} = \frac{2026}{x} + 1$ είναι αδύνατη στο $(0, +\infty)$

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x - \lambda x$, $x \in \mathbb{R}$, $\lambda > 0$.

Γ1. Δείξτε ότι η ελάχιστη τιμή της f είναι $f(\ln \lambda) = \lambda(1 - \ln \lambda)$, $\lambda > 0$.

Μονάδες 6

Γ2. Να δείξετε ότι η ελάχιστη τιμή της f παίρνει την μεγαλύτερη τιμή της όταν $\lambda = 1$.

Μονάδες 7

Γ3. Να δείξετε ότι η μεγαλύτερη τιμή του λ ($\lambda > 0$) για την οποία ισχύει $e^x \geq \lambda x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι η $\lambda = e$.

Μονάδες 6

Γ4. Για $\lambda = e$

i) Να δείξετε ότι η ευθεία $y = \lambda x$ εφάπτεται της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $g(x) = e^x$, $x \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 3

ii) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f την εφαπτομένη της C_g του ερωτήματος (i) και την ευθεία $x = 0$.

Μονάδες 3

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} x \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right), & x > 0 \\ a, & x = 0, \quad a \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Δ1. Να βρείτε την τιμή του a αν είναι γνωστό ότι η f είναι συνεχής στο $x = 0$.

Μονάδες 4

Για $a = 0$

Δ2. i) Δείξτε ότι η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$.

ii) Δείξτε ότι $\ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) > \frac{1}{x+1}$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$.

iii) Δείξτε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f^{-1} .

Μονάδες 3x3=9

Δ3. Θεωρούμε την εξίσωση $f(2+\eta\mu x)=f\left(2+\frac{x-1}{x+1}\right)$, $x \in (1, +\infty)$.

i) Δείξτε ότι η εξίσωση έχει μια τουλάχιστον ρίζα $x_1 \in (1, \pi)$ και μια τουλάχιστον ρίζα $x_2 \in \left(\pi, \frac{5\pi}{2}\right)$.

ii) Να δείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (x_1, x_2)$ τέτοιο ώστε $\sigma\upsilon\nu x_0 - \frac{2}{(x_0+1)^2} = 0$

Μονάδες 2x4=8

Δ4. Δείξτε ότι

$$\int_1^3 f(x) dx > 2 - \ln 2$$

Μονάδες 4

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ